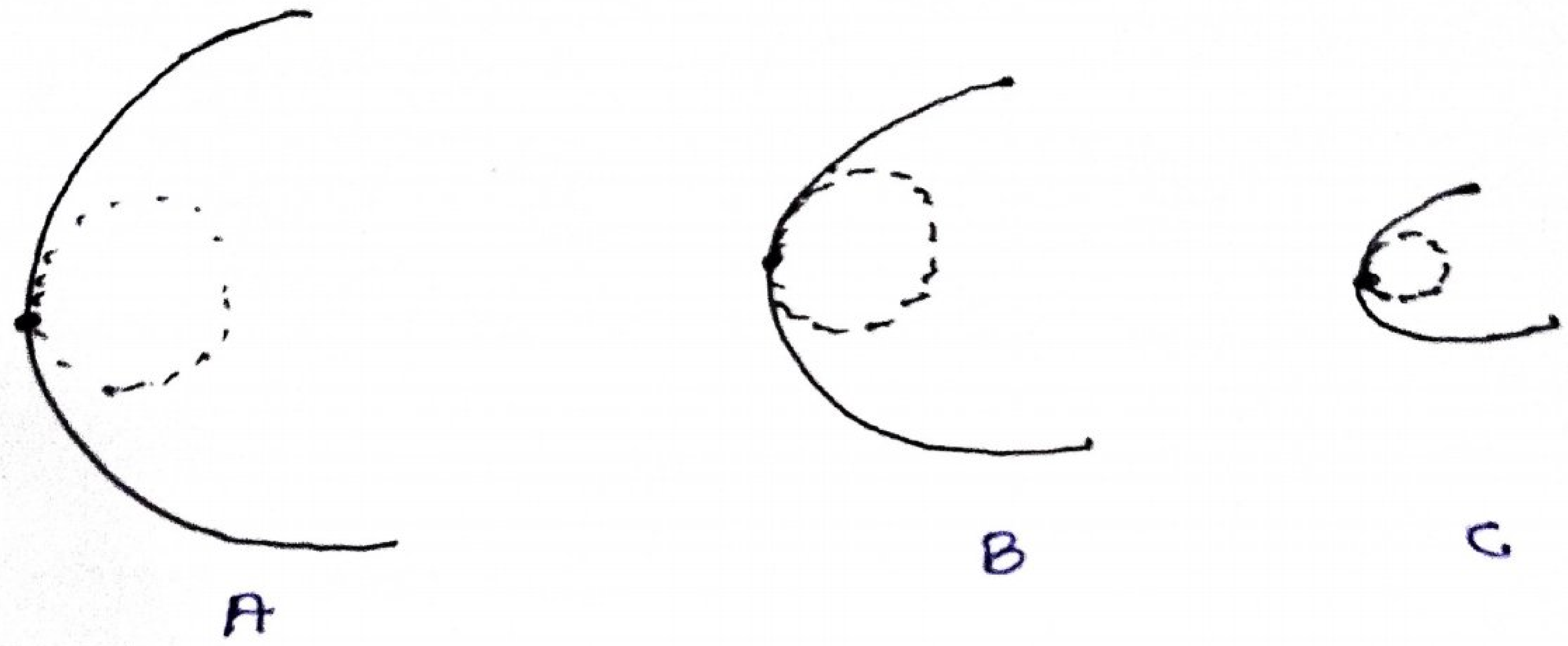
TOPIC :- CURVATURE.

वक्रता (Curvature) :- जब कोई वक्र किसी बिन्दु पर से मुड़ता है, तो इसे वक्र की "वक्रता" कहते हैं।



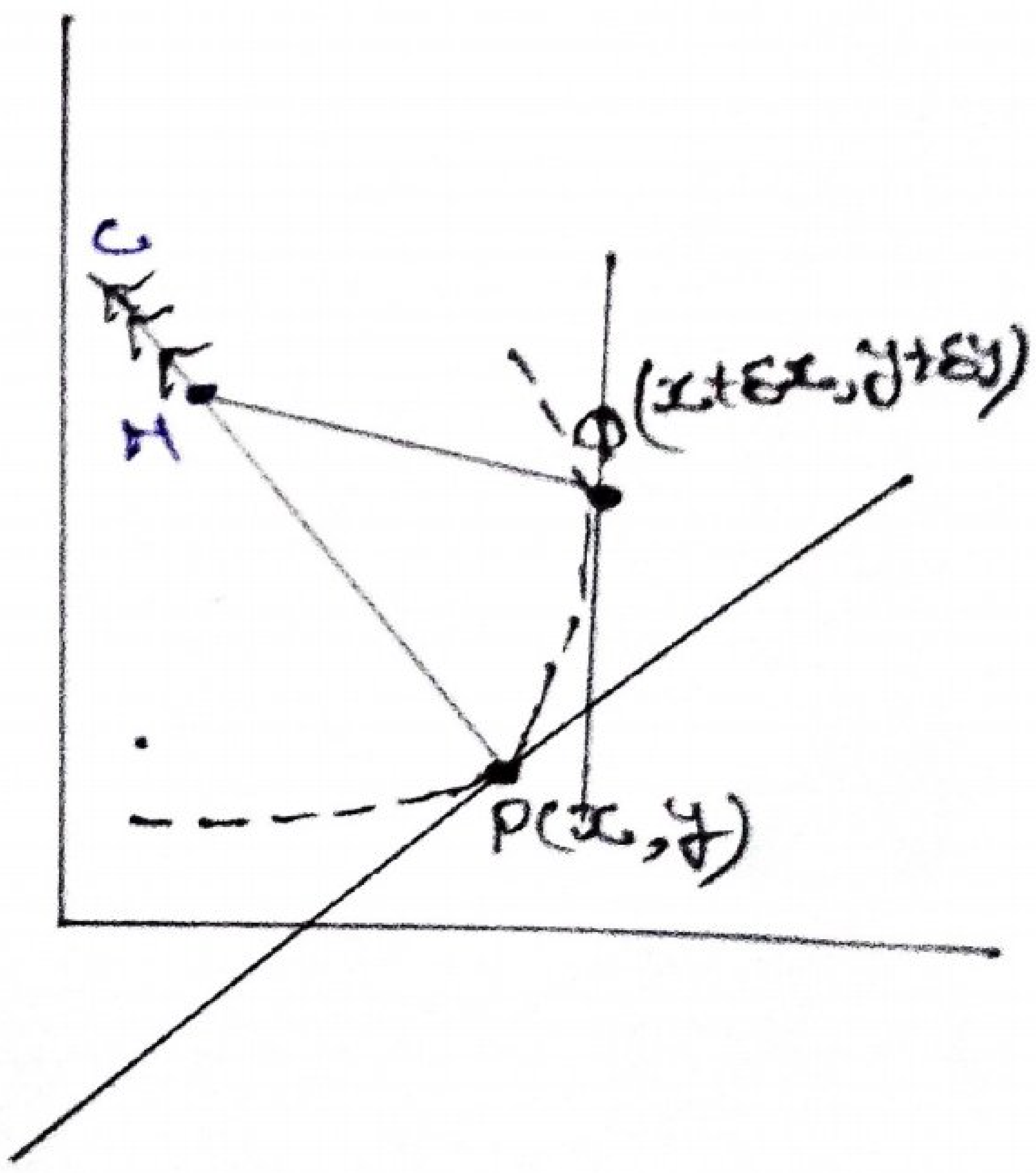
वक्रता (A) < वक्रता (B) < वक्रता (C)

परिभाषाएँ :-

माना वक्र $y = f(x)$ पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ तथा इसके समीप बिन्दु $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ है. यदि P व Q पर अभिलम्ब PN व QN हैं।

यदि बिन्दु Q वक्र के बिन्दु P की ओर अग्रसर हो तो बिन्दु N भी बिन्दु C की ओर अग्रसर होगा

$\lim_{Q \to P}$ तो $PN \to PC$



(i) वक्रता केन्द्र :- बिन्दु C को वक्रता केन्द्र कहते हैं

(ii) वक्रता वृत्त :- बिन्दु C को केन्द्र मानकर CP त्रिज्या का वृत्त खींचा जाए तो इसे "वक्रता वृत्त" कहते हैं।

(iii) वक्रता त्रिज्या :- CP को वक्र की वक्रता त्रिज्या कहते हैं। इसे ρ से प्रकट करते हैं

(iv) वक्रता :- $\frac{1}{PC}$ को P पर वक्र की वक्रता कहते हैं

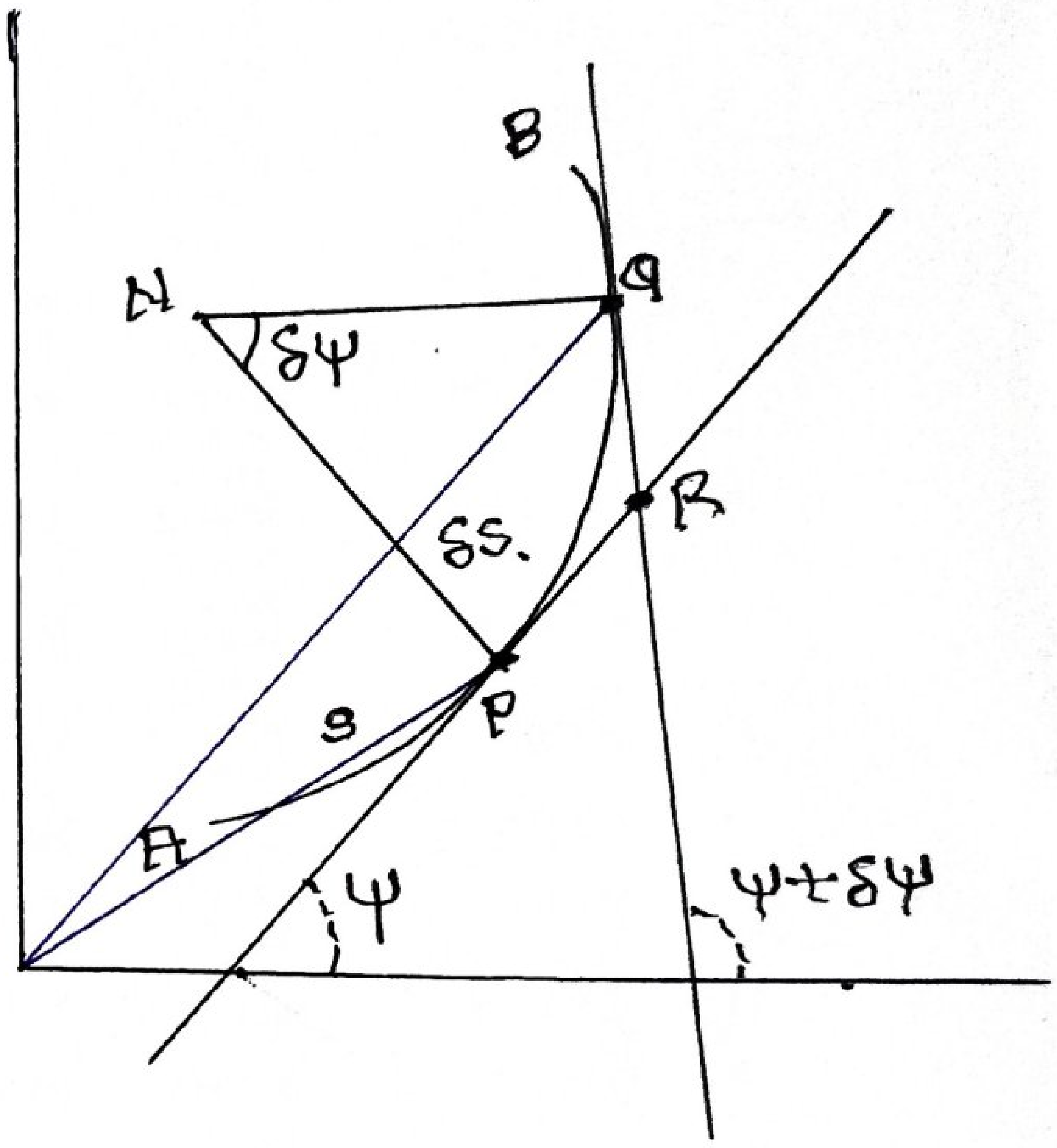
TOPIC - CURVATURE.

वक्रता त्रिज्या :- वक्र की अलग-अलग समी० में वक्रता त्रिज्या भी अलग होती है.

(1) **कार्तीय समीकरण (x-y) रूप :-**

माना वक्र की कार्तीय समी० $y = f(x)$

तो $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ ...(1)



(1) का s के सापेक्ष अवकलन

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2y}{ds\cdot dx}$$

dx से गुणा भाग करने पर.

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}}{\sec^2\psi}$$

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{\sec^2\psi\cdot ds/dx}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots(2)$$

हम जानते हैं

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots(3)$$

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{(1+\tan^2\psi)\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$$

(1) व (3) से →

$$= \frac{(1+d^2y/dx^2)\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{(dy/dx)^2}$$

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\boxed{\frac{ds}{dx} = \frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}}$$

TOPIC :- CURVATURE.

(B). प्राचलिक समी॰ :-

माना वक्र का समी॰ $x = f(t)$ तथा $y = \phi(t)$

t के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \qquad \frac{dy}{dt} = \phi'(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)} = \frac{y'}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) \rightarrow \text{dt से गुणा व भाग}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx}$$

$y' = dy/dx \quad y'' = d^2y/dx^2$

$x' = dx/dt \quad x'' = d^2y/dt^2$

$$= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + (y'/x')^2\right]^{3/2}}{\frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x = f(t),\ y = \phi(t) \\ \rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \end{gathered}}$$

TOPIC :- CURVATURE.

Important Examples :-

Exp-1. कार्डियोइड $s = 4a \sin \frac{1}{3}(\psi - \pi/2)$ के लिए सिद्ध कीजिए
$$s^2 + 9\rho^2 = 16a^2.$$

Solⁿ वक्र का समी॰

$$s = 4a \sin \frac{1}{3}(\psi - \pi/2) \quad \text{----}(1)$$

ψ के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{ds}{d\psi} = 4a \cdot \frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}(\psi - \pi/2) \quad \text{---}(2)$$

$$\rho = \frac{4a}{3} \cos \frac{1}{3}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{---}(3)$$

$$s^2 + 9\rho^2$$

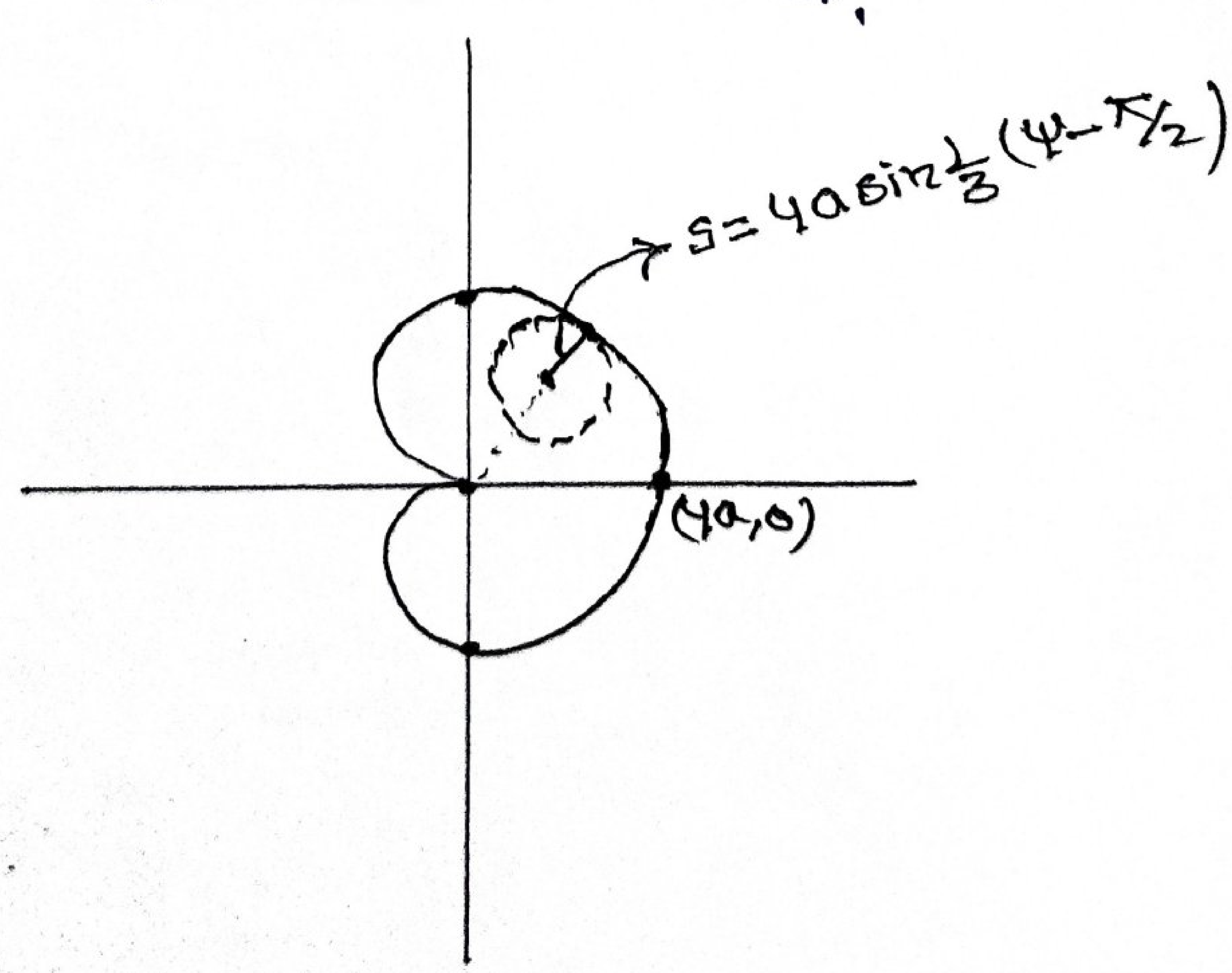
$$= \left[4a \sin \frac{1}{3}(\psi - \pi/2)\right]^2 + 9\left[\frac{4a}{3} \cos \frac{1}{3}(\psi - \pi/2)\right]^2$$

$$= 16a^2 \sin^2 \frac{1}{3}(\psi - \pi/2) + \cancel{9} \cdot \frac{16a^2}{\cancel{9}} \cos^2 \frac{1}{3}(\psi - \pi/2)$$

$$= 16a^2 \left[\underbrace{\sin^2 \frac{1}{3}(\psi - \pi/2) + \cos^2 \frac{1}{3}(\psi - \pi/2)}_{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}\right]$$

$$= 16a^2.$$

अतः $s^2 + 9\rho^2 = 16a^2$ H. Proved.



TOPIC:- CURVATURE.

(C) नैज समी० $(s-\psi)$ रूप :-

वक्रता त्रिज्या $= \dfrac{1}{\text{वक्रता}}$

$$\rho = \frac{1}{d\psi/ds}$$

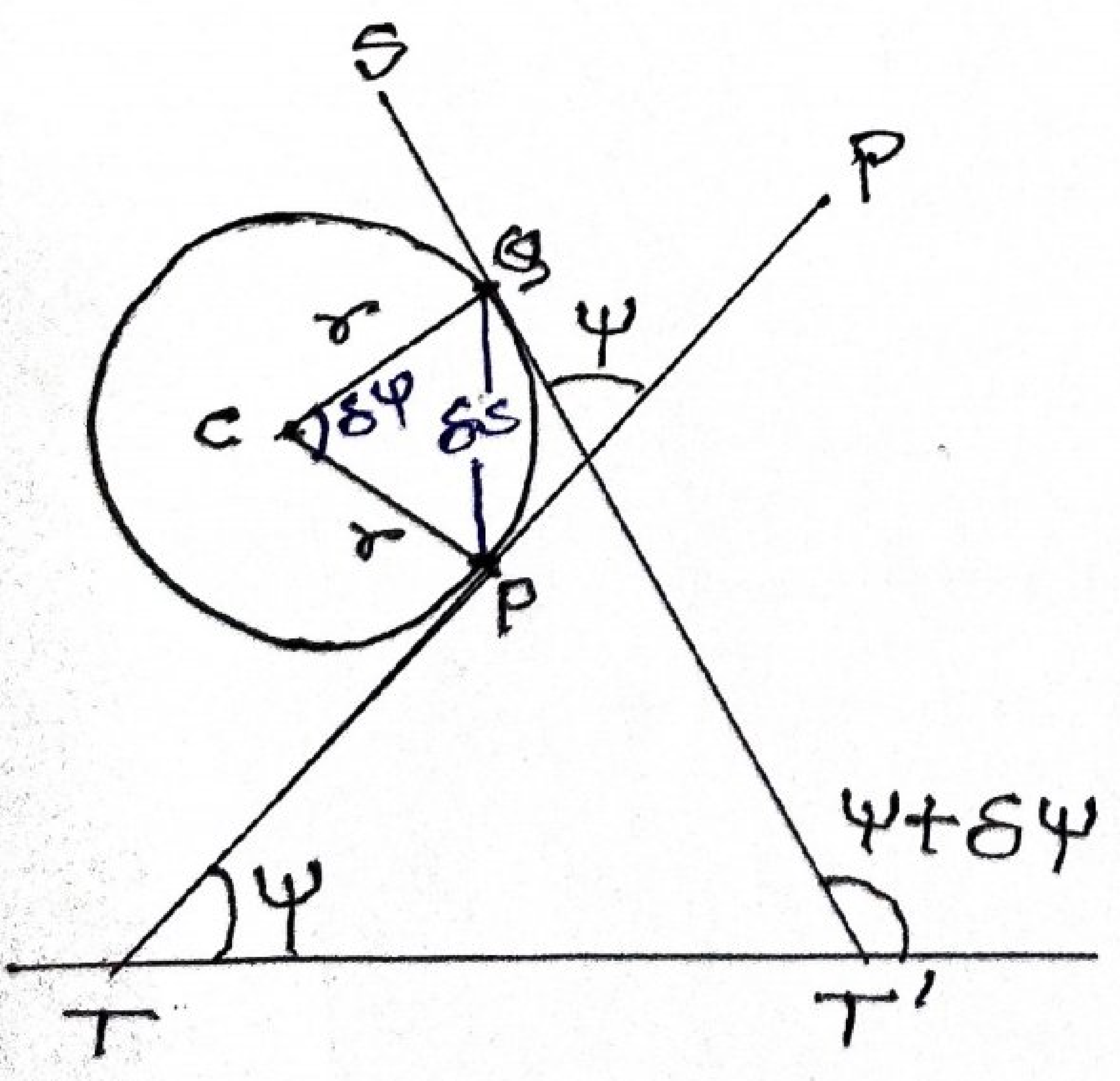
$$\boxed{\rho = \frac{ds}{d\psi}}$$

* $y = f(x)$	$\rho = \dfrac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$
* $x = f(t)$ $y = \phi(t)$	$\rho = \dfrac{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$
* $s = \psi(x)$ या $\psi = s(x)$	$\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$.

* वृत्त के किसी बिन्दु पर वक्रता अचर होती है

माना r त्रिज्या का एक वृत्त है, जिसका केन्द्र C है P व Q दो बिन्दु δs दूरी पर है जिन पर स्पर्श रेखाएं क्रमशः δT व $\delta T'$ है

$$\angle SRS' = \delta\psi = \angle PCQ$$



$$\frac{\overline{PQ}}{CP} = \angle PCQ$$

$$\frac{\delta s}{r} = \delta\psi$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\delta\psi}{\delta s}$$

$$\boxed{r = \frac{\delta s}{\delta\psi}}$$

Imp.

* $\rho \propto \frac{1}{r}$

वक्रता त्रिज्या वृत्त की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होती है

* वृत्त के बिन्दु पर वृत्त की त्रिज्या वक्र की त्रिज्या के बराबर होती है

TOPIC :- CURVATURE.

Important Examples :-

Exp-1. कार्डियोइड $s = 4a \sin\frac{1}{3}(\psi - \pi/2)$ के लिए सिद्ध कीजिए
$$s^2 + 9\rho^2 = 16a^2.$$

Sol^n वक्र का समी॰

$$s = 4a \sin\frac{1}{3}(\psi - \pi/2) \quad ----(1)$$

ψ के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{ds}{d\psi} = 4a \cdot \frac{1}{3} \cos\frac{1}{3}(\psi - \pi/2) \quad ---(2)$$

$$\rho = \frac{4a}{3} \cos\frac{1}{3}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \quad ---(3)$$

$$s^2 + 9\rho^2$$

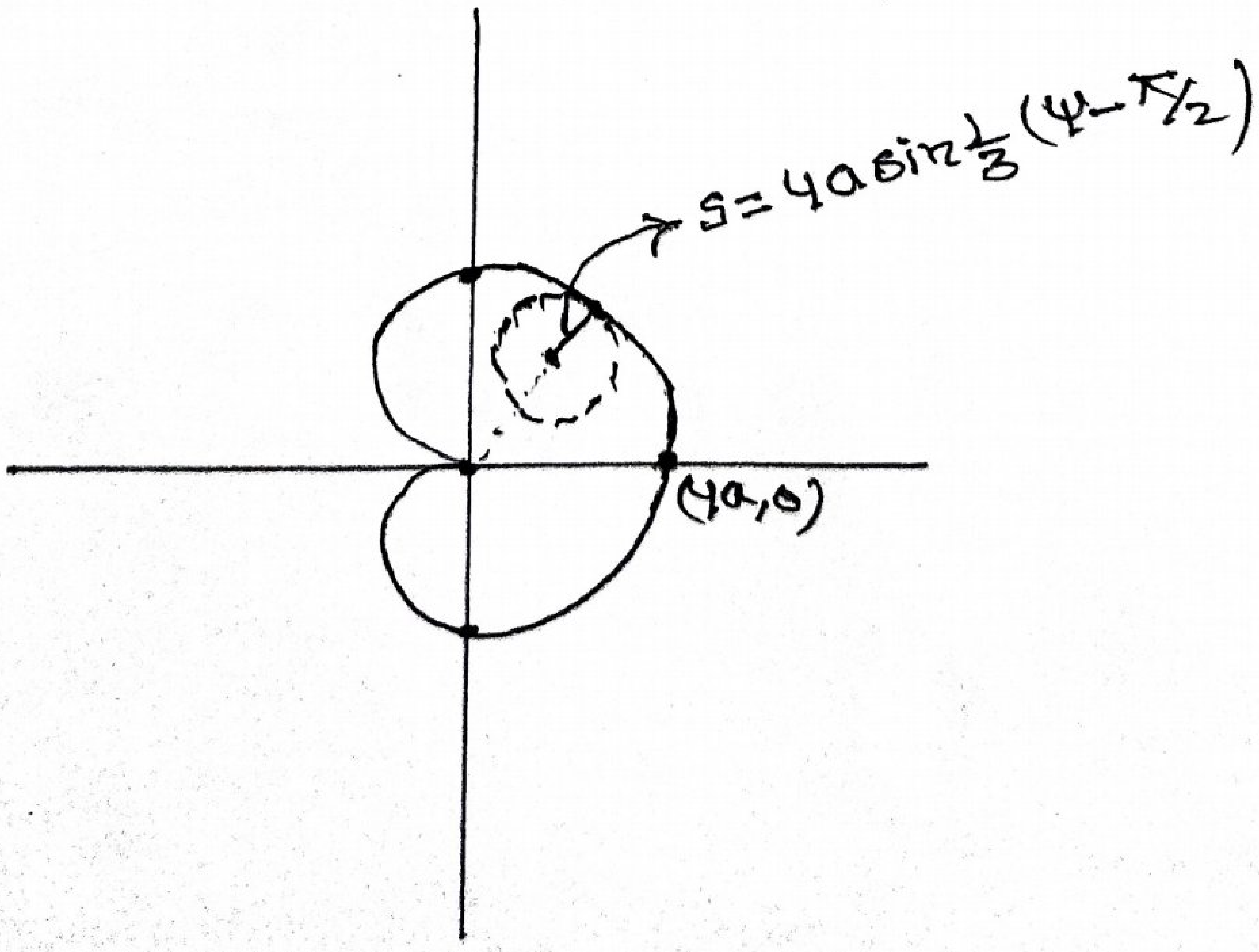
$$= \left[4a \sin\frac{1}{3}(\psi - \pi/2)\right]^2 + 9\left[\frac{4a}{3} \cos\frac{1}{3}(\psi - \pi/2)\right]^2$$

$$= 16a^2 \sin^2\frac{1}{3}(\psi - \pi/2) + \cancel{9} \cdot \frac{16a^2}{\cancel{9}} \cos^2\frac{1}{3}(\psi - \pi/2)$$

$$= 16a^2 \left[\underbrace{\sin^2\frac{1}{3}(\psi - \pi/2) + \cos^2\frac{1}{3}(\psi - \pi/2)}_{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}\right]$$

$$= 16a^2.$$

अतः $s^2 + 9\rho^2 = 16a^2$ H. Proved.



TOPIC - Curvature.

Exp.2. $x^3+y^3=3axy$ के बिन्दु $(3a/2, 3a/2)$ पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

Sol^n वक्र समी०

$$x^3+y^3=3axy \quad [\text{फोलियम}].$$

समी० $x-y$ रूप की है अतः

$$\rho = \frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2}.$$

समी०

$$x^3+y^3=3axy \quad \ldots(1)$$

अवकलन करने पर

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx} = 3a\left[y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\cancel{3}\left(x^2+y^2\cdot\frac{dy}{dx}\right) = \cancel{3}a\left[y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$x^2+y^2\cdot\frac{dy}{dx} = ay+ax\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$(y^2-ax)\frac{dy}{dx} = ay-x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^2}{y^2-ax} \quad \ldots(2)$$

बिन्दु $(3a/2, 3a/2)$ पर

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}} = \frac{a\cdot\frac{3a}{2}-\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{4}-a\cdot\frac{3a}{2}} = \frac{\frac{3a^2}{2}-\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{2}}$$

$$= -\frac{\cancel{\left(\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{2}\right)}} = -1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}} = -1.$$

TOPIC- curvature.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3a/2,\,3a/2)} = -1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

पुन: अवकलन

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y^2-ax)\frac{d}{dx}(ay-x^2) - (ay-x^2)\frac{d}{dx}(y^2-ax)}{(y^2-ax)^2}$$

$$= \frac{(y^2-ax)\left[a\cdot\frac{dy}{dx} - 2x\right] - (ay-x^2)\left[2y\cdot\frac{dy}{dx} - a\right]}{(y^2-ax)^2}$$

बिन्दु $(3a/2,\, 3a/2)$ पर

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}} = \frac{\left(\frac{9a^2}{4} - a\cdot\frac{3a}{2}\right)\left[a\cdot(-1) - \cancel{2}\cdot\frac{3a}{\cancel{2}}\right] - \left(a\cdot\frac{3a}{2} - \frac{9a^2}{4}\right)\left[2y(-1) - a\right]}{\left(\frac{9a^2}{4} - a\cdot\frac{3a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)(-a-3a) - \left(\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}\right)\left[\cancel{2}\cdot\frac{3a}{\cancel{2}} - a\right]}{\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)(-4a) + \left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}\right)(-4a)}{\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{9a^3}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)}(-4a-4a)}{\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{-8a}{\left(\frac{9a^2-6a^2}{4}\right)}$$

$$= -\frac{8a}{\left(\frac{3a^2}{4}\right)} = -\frac{32a}{3a^2}$$

$$= -\frac{32}{3a}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)} = -\frac{32}{3a}.$$

TOPIC :- curvature.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{3a/2,\,3a/2} = -1 \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\frac{3a}{2},\,\frac{3a}{2}} = \frac{-32}{3a}.$$

Now.

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

put values.

$$\rho = \frac{\left[1+(-1)^2\right]^{3/2}}{\frac{-32}{3a}} = \frac{2^{3/2}}{\frac{-32}{3a}}$$

$$= \frac{-\cancel{2}\cdot 2^{1/2}\cdot 3a}{\cancel{32}_{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{16}$$

$$\rho = \frac{3a\sqrt{2}}{16}. \text{ Ans.}$$

Exp. 3. $x = a(\theta+\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ के लिए सिद्ध कीजिए $\rho = 4a\cos(\theta/2)$.

Sol^n $x = a(\theta+\sin\theta)$ $\qquad y = a(1-\cos\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta) \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cancel{a}\sin\theta}{\cancel{a}(1+\cos\theta)} = \frac{\cancel{2}\sin\theta/2\,\cos\theta/2}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta/2}$$

$$= \tan(\theta/2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta/2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\cdot\tan\theta/2\cdot\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \sec^2\theta/2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{4a}\sec^4(\theta/2)$$